Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 3 de 2003.

[2’5 puntos] Se sabe que la función *f* : R → R definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en *x* = 1 que no es extremo relativo y que *f*(1) = 1. Calcula *a*, *b* y *c*.

Solución

Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en *x* = 1 que no es extremo relativo x = 1 es un puntode inflexión, luego tenemos f ‘(1) = 0 y además f ‘’(1) = 0. Tambien el problema nos dice que f(1) = 1.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

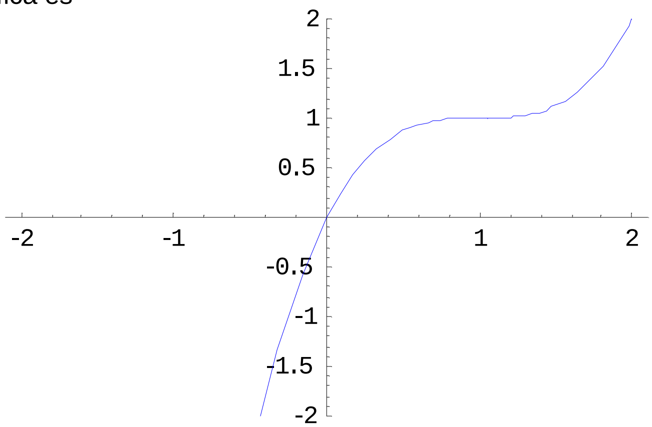
De f ‘’(1) = 0 tenemos 0 = 6 + 2a, luego a = - 3

De f’(1) = 0 tenemos 0 = 3 +2(-3) + b, luego b = 3

De f(1) = 1 tenemos 1 = 1 + (-3) + (3) + c , luego c = 0.

Los coeficientes pedidos son a = -3, b = 3 y c = 0 y la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Aunque no la piden su gráfica es



Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 3 de 2003.

Sea *f* : R → R la función definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

(a) [0’75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 3.

(b) [1’75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la grafica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje OY.

Solución

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

(a)

La ecuación de la recta tangente enx = 3 es $y – f(3) = f'(3)(x – 3)$

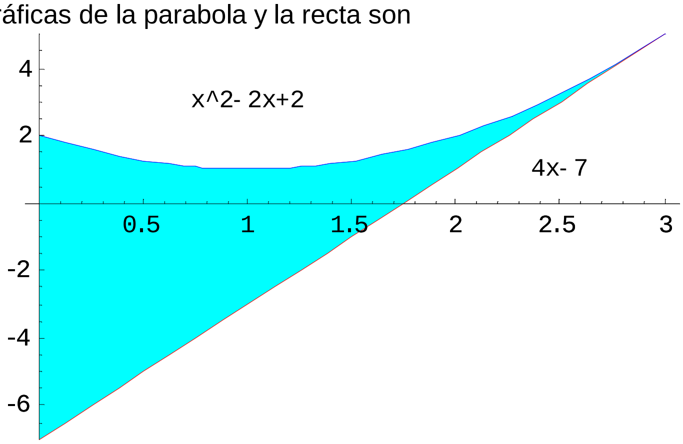
$f(x) = x^2 - 2x + 2$, luego f(3) = 9-6+2 = 5

$f'(x) = 2x – 2$, luego f ‘(3) = 6 – 2 = 4

La recta tangente es y – 5 = 4(x – 3). Operando queda y = 4x – 7

(b)

Aunque no la piden las gráficas de la parabola y la recta son



Área = $\int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) – (4x – 7)]\, dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\, dx = [x^3/3 – 3x^2 + 9x]_0^3 =$

= 9 – 27 + 27 = 9 unidades de área (u.a.)

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 3 de 2003.

[2'5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $A.X = (B.A^t)^t$.

Solución

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$A.X = (B.A^t)^t$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (1)(-3) = -2 + 3 = 1 \neq 0$, existe la matriz invversa A^{-1}, por tanto multiplicando la expresión $A.X = (B.A^t)^t$ por la izquierda por A^{-1}, y teniendo en cuenta las propiedades de las matrices traspuestas tenemos:

$A^{-1}(A.X) = A^{-1}((B.A^t)^t) = A^{-1}((A^t)^t.B^t) = A^{-1}(A.B^t)$ de donde

$I.X = I.B^t$, luego $X = B^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Las propiedades de traspuestas que hemos aplicado son:

$(A^t)^t = A$

$(A.B)^t = B^t.A^t$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 3 de 2003.

Considera el punto P(-2, 3, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a la recta *r*.

(b) [1'5 puntos] Determina el punto de *r* más próximo a *P*.

Solución

P(-2, 3, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$

(a)

Para hallar el plano que pasa por P y contiene a r, formamos el haz de planos que contienen a r y le imponemos la condición de que pase por el punto P

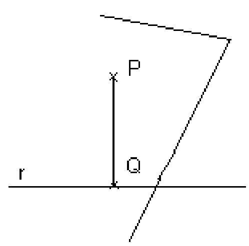
Haz de planos: $(x+y+z+2)+\lambda(2x-2y+z+1) = 0$

Imponemkos la condición de que pase por P

$(-2+3+0+2)+\lambda(2(-2)-2(3)+0+1) = 0$, de donde $3 +\lambda(-9) = 0$, es decir $\lambda = 1/3$

El plano pedido es $(x+y+z+2)+(1/3)(2x-2y+z+1) = 0$. Operando queda $5x+y+4z+7 = 0$

(b)



El punto de r más proximo a P es el que resulta de la proyección ortogonal de P spobre Q, para lo cual calculamos el plano π_1 perpendicular a r que pasa por P, para lo cual el vector normal del plano **n** es el director de la recta r, **v**. Después calculamos ´Q como la intersecciñon del plano π_1 con la recta r.

$\mathbf{v} = \mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(-4) = (3,1,-4)$

$\pi_1 = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 = (3,1,-4) \bullet (x+2, y-3, z-0) = 3x + y - 4z + 3 = 0$

El punto Q es la solución del sistema formado por la reta r y el plano π_1, es decir el sistema:

$x + y + z + 2 = 0$

$2x – 2y + z + 1 = 0$
$3x + y – 4z + 3 = 0$. Haciendo { 2ª + 1ª(-2) ; 3ª + 1ª(-3) }, resulta:

$x + y + z + 2 = 0$
$0 – 4y - z - 3 = 0$
$0 – 2y – 7z - 3 = 0$. Haciendo { 2ª + 3ª(-2) }, resulta:

$x + y + z + 2 = 0$
$0 +0 +13z + 3 = 0$
$0 – 2y – 7z - 3 = 0$.
De donde $z = -3/13$
De $2y = – 3 – 7y = – 3 – 7(-3/13) = - 18 / 13$, luego $y = -9/13$
De $x = - y - z - 2 = 9/13 + 3/13 – 2 = -14/13$
El punto Q buscado es $Q(x,y,z) = Q (-14/13, -9/13, -3/13)$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 3 de 2003.

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f : (0; 3) \to R$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x \le 2, \\ -x+3 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$, y que $f(1) = 0$. Halla la expresión analítica de f.

Solución

$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x \le 2, \\ -x+3 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$, y que $f(1) = 0$

Como es derivable en todo su dominio es continua en todo su dominio, en particular en x = 2, luego

$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

Por el Teorema fundamental del cálculo integral que dice que si f(x) es continua en [a,b] en tonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es derivable y su derivada es $F'(x)= f(x)$. En nuestro caso $f(x) = \int f'(x)\,dx$

Si $0 < x \le 2$, tenemos $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x – 1)\,dx = x^2/2 – x + K$
Si $2 < x < 3$, tenemos $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (– x + 3)\,dx = -x^2/2 + 3x +H$
Como $f(1) = 0$, tenemos $0 = 1/2 – 1 + K$, de donde $K = 1/2$
Como $f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$ tenemos

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x^2/2 + 3x +H) = - 2 + 6 + H$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2/2 - x +K) = 2 - 2 + 1/2$

Igualando tenemos $- 2 + 6 + H = 2 - 2 + 1/2$, de donde $H = 1/2 - 4 = -7/2$. Por tanto la función es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 1/2 & \text{si } 0 < x \le 2, \\ -\frac{x^2}{2} - x - 7/2 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 3 de 2003.

Sea $f : R \to R$ la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a, \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \ge a \end{cases}$, donde a es un número real.

(a) [0'5 puntos] Determina a.
(b) [2 puntos] Halla la función derivada de f.

Solución

$f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a, \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \ge a \end{cases}$,

(a)
Como es continua en todo su dominio es continua en x = a, luego $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} (x^2 – 5x + 7) = a^2 – 5a + 7$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} |2 - x| = |2 - a|$

Igualñando tenemos $a^2 - 5a + 7 = |2 - a|$, de donde tenemos dos expresiones según sea a < 2 o sea a > 2:

Si a < 2, $a^2 - 5a + 7 = 2 - a$. Operando sale $a^2 - 4a + 5 = 0$, que no tiene soluciones reales.
Si a > 2, $a^2 - 5a + 7 = -2 + a$. Operando sale $a^2 - 6a + 9 = 0$, que tiene por solución a = 3 doble. Luego la función dada es $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < 3 \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

(b)

$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, su derivada es $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ +1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Nos falta ver la derivabilidad en x = 2 y x = 3.

Para que exista f '(2), tiene que ser $f'(2^+) = f'(2^-)$

$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (+1) = +1$

$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, no existe f '(2)

Para que exista f '(3), tiene que ser $f'(3^+) = f'(3^-)$

$f'(3^+) = \lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - 5) = +1$

$f'(3^-) = \lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^-} (+1) = +1$

Como $f'(3^+) \neq f'(3^-)$, existe f '(3) = 1, luego la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ +1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 3 de 2003.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) [1 punto] Determina los valores de *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
(b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la matriz inversa de *A* para *m* = 2.

Solución

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(a)

Para que la matriz A tenga inversa su determinante ha de ser distinto de cero, es decir $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = { desarrollo por los adjuntos de la última fila } =

$= m(0) - 0 + 1(1 - m^2) = 1 - m^2$.

Si $1 - m^2 = 0$ tenemos m = +1 y m = - 1, por tanto la matriz A tiene inversa si y solamente si $m \neq +1$ y $m \neq -1$.

(b)

Inversa de A para m = 2

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es $A^{-1} = (1/|A|) \cdot Adj(A^t)$

$|A| = 1 - (2)^2 = -3$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = (1/|A|).\ Adj(A^t) = (1/-3).\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 3 de 2003.

Considera una recta *r* y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in \Re) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \quad (\alpha\ \beta \in \Re) \\ z = \beta \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de la recta *r* y el plano π.

(b) [1'25 puntos] Dados los puntos *B*(4, 4, 4) y *C*(0, 0, 0), halla un punto *A* en la recta *r* de manera que el triángulo formado por los puntos *A*, *B* y *C* sea rectángulo en *B*.

Solución

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in \Re) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \quad (\alpha\ \beta \in \Re) \\ z = \beta \end{cases}$$

(a)

La rfecta r tiene por punto A(0,0,0) y vector director **u** = (1,1,0)

El plano π tiene como punto B = (0,0,0) y como vectores paralelos independientes **v** = (1,1,0) y **w** = (0,0,1)

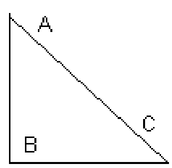
Ponemos el plano π en forma general y sustituimos en el la ecuación de la recta en forma paramétrica.
Si nos sale t = nº, la recta se corta con el plano en un punto.
Si nos sale 0 = 0, la recta está contenida en el plano.
Si nos sale nº = 0, lo cual es absurdo, nos dice que la recta es paralela al plano y no está contenida en él.
Plano π en forma general

$0 = det(\mathbf{x - b, v, w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = {desarrollamoxz por los adjuntos de la última fila} = x – y = 0

Sustituimos la recta r en el plano x – y = 0, y nos queda t – t = 0, es decir 0 = 0, por tanto la recta r está contenida en el plano π.

(b)

B(4, 4, 4) y *C*(0, 0, 0). Sea A un punto genérico de la recta r, es decir A(t, t, 0)



Como el triángulo es rectángulo en B los vectores **BA** y **BC** son perpendiculares y su priocucto escalar es cero.

BA = (t – 4, t – 4 , -4)

BC = (-4, -4, -4)

BA • BC = 0 = (t – 4, t – 4 , -4) • (-4, -4, -4) = -4t + 16 – 4t + 16 + 16 = - 8t + 48, de donde t = 6, y el punto A pedido es A(t,t,0) = A(6,6,0).